UNIVERSITÉ DE POITIERS

MATHÉMATIQUES

40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS FRANCE
Tél. 49 46 26 30
Poste 671

Agreg 1989-1990
Devoir d'analyse à remettre le 8 novembre

6240

COMPOSITION D'ANALYSE

Durée : 6 heures

PRÉAMBULE

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels. Les espaces vectoriels considérés sont réels et non réduits au vecteur nul.

Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme usuelle :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \| u \| = \sup \left\{ \frac{\| u(x) \|}{\| x \|}, \ x \in E \text{ et } x \neq 0 \right\}.$$

PRÉLIMINAIRES

Les résultats des deux dernières questions de cette partie pourront être utilisés dans la suite du problème, même s'ils n'ont pas été démontrés.

Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans un espace vectoriel normé E. On dit que γ est dérivable en 0 si et seulement si

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \text{ existe ; on la note alors } \gamma'(0).$$

Tournez la page S. V. P.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, Ω un ouvert de E, x_0 un point de Ω et f une application *continue sur* Ω, à valeurs dans F. On dit que f est *quasi différentiable* en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour toute application γ continue de $[0, 1]$ dans Ω, dérivable en 0, vérifiant $\gamma(0) = x_0$, l'application $f \circ \gamma$ est dérivable en 0 et $(f \circ \gamma)'(0) = u(\gamma'(0))$.

1° *a.* Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, l'application linéaire u est unique. On l'appelle la *quasi-différentielle de f en x_0* et on la note $qf(x_0)$.

b. Montrer que si f, continue sur Ω, est différentiable en x_0, elle y est quasi différentiable et que $qf(x_0) = df(x_0)$, où $df(x_0)$ désigne la différentielle de f en x_0.

c. Énoncer et justifier un théorème relatif à la composition des applications quasi différentiables.

2° On suppose, dans cette question seulement, qu'il existe un réel k tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, \quad \| f(x) - f(y) \| \leqslant k \| x - y \|.$$

Montrer que s'il existe u linéaire de E dans F telle que pour tout vecteur a de E,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} = u(a),$$

alors f est quasi différentiable en x_0.

3° Montrer que si f, continue sur Ω, est quasi différentiable en x_0, alors $qf(x_0)$ est continue de E dans F.

4° Lorsque E est de dimension finie, montrer que toute application f, continue sur Ω, et quasi différentiable en x_0, est différentiable en x_0.

E désignant un espace vectoriel normé, on s'intéresse aux problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ suivants :

$\mathfrak{P}$ $\left\{\right.$ déterminer l'ensemble P des éléments de E où l'application de E dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \| x \|$, est différentiable, et calculer $df(x_0)$ pour x_0 dans P;

$\mathfrak{Q}$ $\left\{\right.$ déterminer l'ensemble Q des éléments de E où l'application de E dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \| x \|$, est quasi différentiable, et calculer $qf(x_0)$ pour x_0 dans Q.

I

A

Soient $E = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans E. On considère les trois normes :

$$\| x \|_\infty = \sup \{ | x_i | ; 1 \leqslant i \leqslant n \} ;$$

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i | ;$$

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

1° Résoudre, avec soin, le problème $\mathfrak{P}$ pour E muni successivement de chacune de ces trois normes.

2° Préciser dans chaque cas les composantes connexes de P (on en indiquera en particulier le nombre).

B

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $E^* = \mathcal{L}_C(E, \mathbb{R})$ son dual, normé (cf. PRÉAMBULE). On note B et S (resp. B* et S*) la boule unité fermée et la sphère unité de E (resp. E*).

Pour chaque x_0 de S, on note L_{x_0} l'ensemble des formes linéaires φ, appartenant à S*, telles que

$$(1) \qquad \forall x \in B, \quad \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) = 1.$$

On admet que, pour tout x_0 de S, cet ensemble L_{x_0} n'est pas vide.

Toute application l, de S dans S*, qui, à tout x_0 de S, associe un élément l_{x_0} de L_{x_0} est appelée *fonction de dualité*.

On dit que B est *lisse* en x_0 ($x_0 \in S$) si et seulement si L_{x_0} est de cardinal 1.

On dit que B est *strictement convexe* en x_0 (x_0 élément de S) si et seulement si $B \setminus \{ x_0 \}$ est convexe.

1° Soit $l : S \longrightarrow S^*$ une fonction de dualité. Démontrer que si B est lisse en x_0, alors B^* est strictement convexe en l_{x_0}.

2° Démontrer que, si pour toute fonction de dualité l, B^* est strictement convexe en l_{x_0}, alors B est lisse en x_0.

3° Soient (x, y) un élément de S^2, et λ un réel strictement positif tel que $x + \lambda y$ soit non nul. Soit $z = \dfrac{x + \lambda y}{\| x + \lambda y \|}$. Démontrer que, pour toute fonction de dualité l :

$$l_x(y) \leqslant \frac{\| x + \lambda y \| - 1}{\lambda} \leqslant l_z(y).$$

4° Soient x_0 un élément de S et l une fonction de dualité. Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

a. B est lisse au point x_0,

b. l est continue au point x_0,

c. la norme est différentiable au point x_0.

II

1° Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ lorsque E est un espace euclidien qui n'est pas de dimension finie.

2° Soit F l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, qui convergent vers 0. On le norme en posant : $\| x \|_\infty = \sup \{ \mid x_n \mid ; n \in \mathbb{N} \}$.

Résoudre les problèmes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ pour F. Quelles sont les composantes connexes de P et Q ?

3° Soit G l'espace vectoriel des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série de terme général $\mid x_n \mid$ converge. On le norme en posant :

$$\| x \|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mid x_n \mid .$$

Tournez la page S. V. P.

a. Résoudre le problème $\mathcal{Q}$ pour G. L'ensemble Q est-il ouvert ? Préciser ses composantes connexes.

b. Résoudre le problème $\mathcal{P}$ pour G.

III

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, normé par :

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \quad \| x \| = \sup \{ \, | x(t) | \, ; \quad t \in [0, 1] \, \}.$$

1° Montrer que si l'application de E dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto \| x \|$, est quasi différentiable en x_0, l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$: $t \longmapsto | x_0(t) |$, n'atteint son maximum qu'en un seul point.

2° *a.* Soient a et b deux éléments de E. Montrer que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda \longmapsto \| a + \lambda b \|$ admet, en tout point, une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

b. Soit x_0 un élément de E tel que l'application : $t \longmapsto | x_0(t) |$ n'atteigne son maximum qu'en un seul point t_0.

Soient a un élément de E et λ un réel; on note t_λ la borne supérieure de l'ensemble des éléments de $[0, 1]$ où l'application : $t \longmapsto | x_0(t) + \lambda a(t) |$ atteint son maximum.

Montrer que $\displaystyle\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} t_\lambda = t_0$.

c. En déduire la solution du problème $\mathcal{Q}$ pour E. L'ensemble Q est-il ouvert ? Quelles sont ses composantes connexes ?

3° Résoudre le problème $\mathcal{P}$ pour E.